ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ, διδάσκων Α. Τόλιας

Θέμα 1 [2 μον.]
Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : \ A \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{A \subset X : \ X \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

και

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \quad \text{το σύνολο } F \text{ έχει τέσσερα στοιχεία}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma-$άλγεβρα και ότι $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$.

Θέμα 2 [2 μον.]
Αν $\beta > 0$ και $f : [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Borel υποσύνολο A του $[-\beta, \beta]$ με $\lambda(A) > 2\beta - \varepsilon$ ώστε ο περιορισμός της f στο A να είναι φραγμένη συνάρτηση.

Θέμα 3 [2 μον.] (i) Αν $\varepsilon > 0$ να κατασκευάσετε ένα κλειστό, μη φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$, με μέτρο Lebesgue θετικό και μικρότερο του ε.
(ii) Αν $\varepsilon > 0$, να κατασκευαστεί ένα κλειστό, μη φραγμένο και συνεκτικό υποσύνολο B του $\mathbb{R}^2$, με με μέτρο Lebesgue θετικό και μικρότερο του ε.

Θέμα 4 [2 μον.].
Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ και $0 < \mu(B_m) < +\infty$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

β) Αν $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω, και ορίσουμε $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με τύπο $\nu(A) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(A\cap B_m)}{2^m \cdot \mu(B_m)}$ να δείξετε ότι το ν είναι πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν $\nu(A) = 0$.

Θέμα 5 [2 μον.]
Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \int_0^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \cdot e^{-2x} dx.$$

[Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. (Να θεωρηθεί γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ακολουθία με γενικό όρο $\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$ είναι αύξουσα.)]